$\boxed{2^{\circ}}$ Sea la curva $r = 2-2\cos\theta$

a) ¿Cómo se llama esta familia de curvas?

b) Representación gráfica y a mano alzada

c) Discutir sus simetrías

d) Calcular la longitud del arco total de dicha curva

---

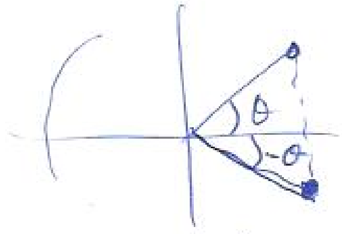
a, b, c) Contestamos los tres apartados al realizar un estudio de dicha curva.

→ Sabemos que θ varía de 0 a 2π. Como $2-2\cos\theta$ es continua la curva también lo será.

→ Para $\theta = 0 \Rightarrow r = 2-2\cos 0 = 0$
Para $\theta = 2\pi \Rightarrow r = 2-2\cos 2\pi = 0$ $\Rightarrow$ la curva es cerrada.

→ Como $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ tenemos que r también está acotado: $0 \leq r \leq 4$.

→ Como $\cos\theta = \cos(-\theta)$ la curva va a ser simétrica respecto al eje X



→ ~~Co~~ $\cos\theta$ es decreciente en $(0,\pi)$ luego r va a ser creciente en $(0,\pi)$

→ $\cos\theta$ es creciente en $(\pi, 2\pi)$ luego r va a ser decreciente.

- Es valor máximo de r se obtiene para $\theta = \pi \Rightarrow$

$$r = 2 - 2\cos\pi = 4 \rightarrow (0,-4)$$

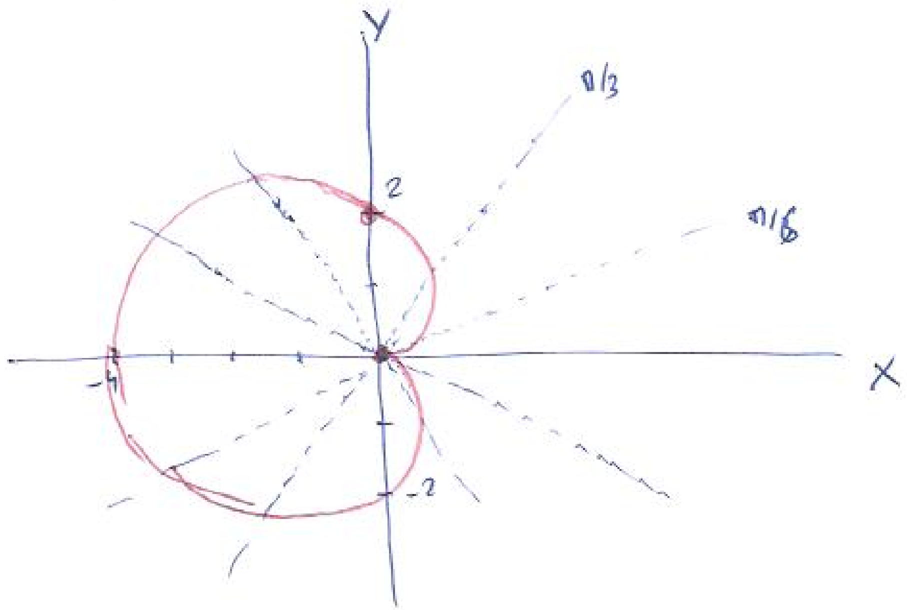
- En $\frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 2$ y por simetría $\Rightarrow$ en $\frac{3\pi}{2}$ $r = -2$

- Veamos algunos valores más:

θ	r	Punto
0	0	$(0,0)$
$\frac{\pi}{6}$	$2-\sqrt{3}$	
$\frac{\pi}{3}$	1	$(0'5, \frac{\sqrt{3}}{2})$
$\frac{\pi}{2}$	2	$(0,2)$
$\frac{2\pi}{3}$	3	$(-1'5, 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})$

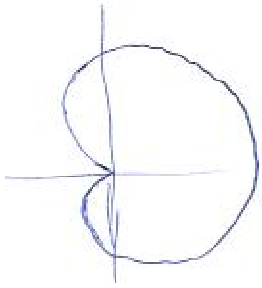
- Tenemos que para $\frac{\pi}{3} \Rightarrow r = 1$
  $\frac{4\pi}{3} \Rightarrow r = 3$ $\Bigg\} \Rightarrow$ No es simétrica respecto al origen

- Para $\frac{\pi}{3} \Rightarrow r = 1$
  $\frac{2\pi}{3} \Rightarrow r = 3$ $\Bigg\} \Rightarrow$ No es simétrica respecto al eje Y

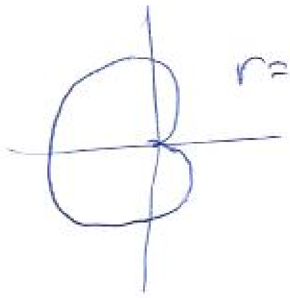


- Este conjunto de curvas se llaman <u>cardioides</u> por que su dibujo recuerda a un corazón. Es la curva que se obtiene al girar una circunferencia de radio r sobre el exterior de otra circunferencia del mismo radio.

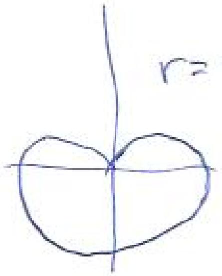
Básicamente existen 4 tipos:



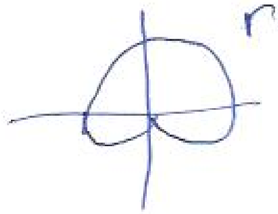
$r = 1 + \cos\theta$



$r = 1 - \cos\theta$



$r = 1 - \operatorname{sen}\theta$



$r = 1 + \operatorname{sen}\theta$

Las cardioides pertenecen a la familia de las epicicloides que son las curvas generadas por un pto de una circunferencia que rueda sobre otra fija por su exterior. Si los radio de las circunferencias son iguales se forman las cardioides.

c/ $r = 2-2\cos\theta$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{(2-2\cos\theta)^2+(2\,\text{sen}\,\theta)^2}\,d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4+\underbrace{4\cos^2\theta-8\cos\theta+4\,\text{sen}^2\theta}_{4}}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{8-8\cos\theta}\,d\theta=$$

$$=2\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\sqrt{4\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=4\int_0^{2\pi}\left|\text{sen}\,\frac{\theta}{2}\right|d\theta=$$

$$\text{sen}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$=8\left[-\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8\cdot\left|-\cos\pi+\cos 0\right|=$$

$$=8\cdot 2=16\,u^2$$

Otro método:

Se podría hacer una parametrización de la curva:

$$\begin{cases} x=(\overset{r}{2-2\cos\theta})\cdot\cos\theta \\ y=(2-2\cos\theta)\cdot\text{sen}\,\theta \end{cases}\qquad \theta\in[0,2\pi]$$

resuelta en el método anterior

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta=\int_0^{2\pi}2\sqrt{2-2\cos\theta}\,d\theta=16$$