NAVARRA - COVID - 2021

(1º) $f(x) = \left[\int_0^x e^{-t^2} dt\right]^2$ $g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$

Demostrar que $F(x) = f(x) + g(x)$ es una constante y determinarla.

SOLUCIÓN

Para demostrar que $F(x)$ es una constante vamos a demostrar que $F'(x)=0$ $\Rightarrow$ ¿$F'(x) = f'(x) + g'(x) = 0$?

Hallamos cada una de las derivadas:

• $f'(x) = \frac{d\left[\int_0^x e^{-t^2}dt\right]^2}{dx} = 2\int_0^x e^{-t^2}dt \cdot \frac{d\int_0^x e^{-t^2}dt}{dx} \underset{\substack{\text{TMA} \\ \text{FUNDAMENTAL} \\ \text{DEL CÁLCULO}}}{=}$

$$= 2\int_0^x e^{-t^2}dt \cdot e^{-x^2} = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

• Para hallar la derivada de $g(x)$ aplicamos la fórmula de Leibniz para derivar integrales definidas:

$$\frac{d f(x,t)}{dx} = \int_0^1 \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} dt = \int_0^1 \frac{-2x\cancel{(1+t^2)} \cdot e^{-x^2(1+t^2)}}{\cancel{(1+t^2)}} dt$$

$$= -2x\int_0^1 e^{-x^2} \cdot e^{-(xt)^2} dt = -2x e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2} dt \underset{\substack{z = xt \\ t=0 \Rightarrow z=0 \\ t=1 \Rightarrow z=x \\ dz = x\,dt}}{=}$$

$$= -2 e^{-x^2}\int_0^x e^{-z^2} dz = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2} dt$$

Por lo tanto

$$F'(x) = f'(x) + g'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt - 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = C \qquad C \in \mathbb{R}$$

Vamos a determinar C

$$C = F(0) = f(0) + g(x)$$

$$f(0) = \left[\int_0^0 e^{-t^2}dt\right]^2 = 0$$

$$g(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arctg} t\Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}$$

Luego $C = \frac{\pi}{4}$ #