$\boxed{2°}$ $P_3(t)$ conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow P_3 \qquad f(x,y,z) = xt^3 + yt + (y+z)$$

SOLUCIÓN

Llamo C_3 a la base canónica de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow C_3 = \{(1,0,0)(0,1,0),(0,0,1)\}$

$P_3(t)$ tiene dimensión 4 y su base canónica $C_4 = \{(t^3,0,0,0),(0,t^2,0,0),$ $(0,0,t,0),(0,0,0,1)\}$ que podemos considerarla como

$$C_4 = \{(1,0,0,0),(0,1,0,0)(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

sabiendo que la primera coordenada representa t^3, la segunda t^2, la tercera t y la cuarta 1.

$P(x) = ax^3+bx^2+cx+d \underset{\text{en forma vectorial}}{=} (a,b,c,d)$

a) Demostrar que f es una aplicación lineal.

f es aplicación lineal $\Leftrightarrow f(aV_1+bV_2) = af(V_1)+bf(V_2)$ siendo $a,b \in \mathbb{R}$ y $V_1, V_2 \in \mathbb{R}^3$

Llamo $V_1 = (x,y,z)$ y $V_2 = (x',y',z')$

$$f(aV_1+bV_2) = f(ax+bx', ay+by', az+bz') =$$

$$= (ax+bx')t^3 + (ay+by')t + (ay+by'+az+bz') =$$

$$= axt^3 + ayt + a(y+z) + bx't^3 + by't + b(y'+z') =$$

$$= a\overset{f(V_1)}{(xt^3+yt+(y+z))} + b\overset{f(V_2)}{(x't^3+by't+(y'+z'))} =$$

$$= af(V_1) + bf(V_2) \qquad \#$$

b/ Hallar matriz coordenada de f en C_3 y C_4

$$M_{C_4 C_3}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ y+z \end{pmatrix} = xt^3 + yt + y+z$$

c/ ¿Es biyectiva? ⟺ ¿Es inyectiva y suprayectiva

f es inyectiva ⟺ $\mathrm{Ker}(f) = \langle (0,0,0) \rangle$

$\mathrm{Ker}(f) = \{ (x,y,z) \text{ t.q. } f(x,y,z) = 0 \}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{matrix}$$

⟹ luego $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$ ⟹ f es inyectiva

Otra forma de verlo es: $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow v_1 = v_2$

$$f(v_1) = xt^3 + yt + (y+z) = x't^3 + y't + (y'+z) = f(v_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x = x' \\ y = y' \\ y+z = y'+z' \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = x' \\ y = y' \\ z = z' \end{matrix} \Rightarrow v_1 = v_2 \Rightarrow f \text{ es inyectiva.}$$

∘ f es suprayectiva si $\mathrm{Im} f = P_3(t)$. Esto es equivalente a que el $rg(M) = \mathrm{Dim}(P_3(t) = 4$ y $rg(M) = 3$, luego no es suprayectiva.

Otra forma de verlo es considerar los polinomios con término en grado 2 que nunca pueden ser imágenes a través de f

Por lo tanto f no es inyectiva

d) $B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ $B' = \{t^3, t^2+t, t+1, 1\}$

$$\parallel$$

$\{(1,0,0,0), (0,1,1,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}$

Nos piden $M_{B'B}(f)$

Veamos dos métodos:

MÉTODO 1:

tenemos $P_{C_4} = M_{C_4C_3}(f) \cdot X_{C_3} \Rightarrow M_{B'C_4}(Id) \cdot P_{B'} =$

$X_{C_3} = M_{BC_3}(Id) X_B$ $= M_{C_4C_3}(f) \cdot M_{BC_3}(Id) X_B \Rightarrow$

$P_{C_4} = M_{B'C_4}(Id) P_{B'}$

$$\Rightarrow P_{B'} = \underbrace{M_{B'C_4}(Id)^{-1} \cdot M_{C_4C_3}(f) M_{BC_3}(Id)}_{\overset{\parallel}{M_{BB'}(f)}} X_B$$

O sea: $M_{BB'}(f) = (M_{B'C_4}(Id))^{-1} \cdot M_{C_4C_3}(f) \cdot M_{BC_3}(Id)$

- $M_{BC_3}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $M_{B'C_4}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Hallamos su inversa por Gauss-Jordan:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{F_3-F_2 \to F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\overset{F_4-F_3 \to F_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{matrix}}_{M_{B'C_4}(Id)^{-1}}$$

Luego $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Método 2:

Hallamos f de cada elemento de B

$$f(1,0,0)=t^3$$

$$f(1,1,0)=t^3+t+1$$

$$f(1,1,1)=t^3+t+2$$

Ponemos estos vectores obtenidos en función de la base canónica C_4:

$$t^3=(1,0,0,0)=1\cdot e_1=(1,0,0,0)$$

$$t^3+t+1=(1,0,1,1)=1\cdot e_1+0\,e_2+1\cdot e_3+0\cdot e_4=$$
$$=(1,0,1,0)$$

$$t^3+t+2=(1,0,1,2)=1e_1+0e_2+1e_3+1e_4=$$
$$=(1,0,1,0)$$

Por lo tanto: $M_{BB'}(f)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$