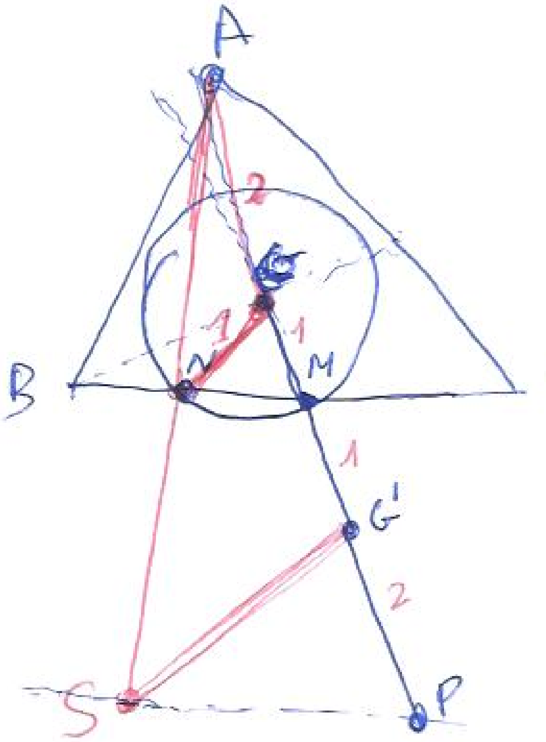
3º



Construimos el pto G' situado en la recta AG a la misma longitud de GM. Por lo que tenemos que $\overline{GG'} = \overline{AG}$

De ello deducimos que los triángulos $\widehat{AGN}$ y $\widehat{AG'S}$ son semejantes (1)

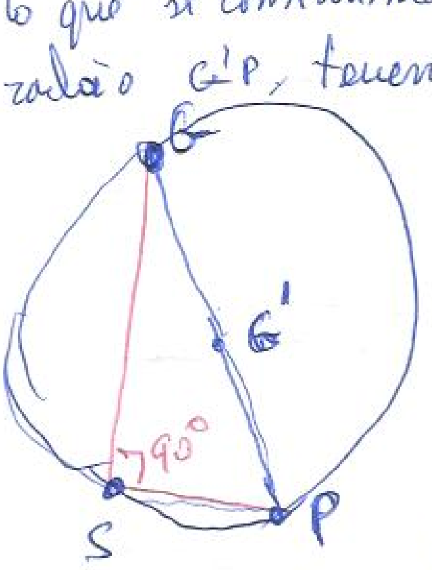
Construimos P en la intersección de la recta AP y la recta SP que es la paralela a BC por S.

Tenemos que los triángulos $\widehat{GNM}$ y $\widehat{G'SP}$ son semejantes. (2). Luego $\overline{G'S} = \overline{G'P}$

También tenemos que $\widehat{ANM}$ es semejante a $\widehat{ASP}$ y de razón $r=2$ ya que $\overline{AN} = \overline{NS}$. Por lo que tenemos que $\overline{AM} = \overline{MP} \Rightarrow \overline{G'P} = \overline{AG} = \overline{GG'}$

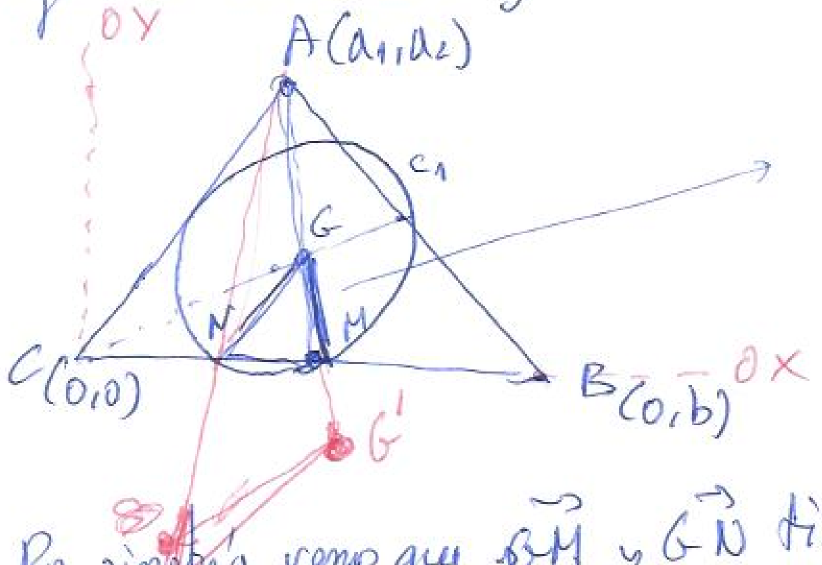
Con todo lo anterior tenemos que $\overline{GG'} = \overline{SG'} = \overline{PG'}$

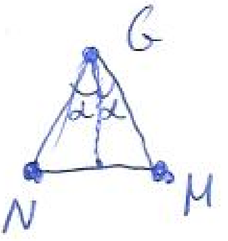
Por lo que si construimos la circunferencia de centro G' y radio $G'P$, tenemos que el ángulo que forman GS y SP es de 90°



Y como SP es paralela a BC obtenemos que GS es perpendicular a BC con lo que demostramos el apartado b.

a/ Para hallar las coordenadas de S nos podemos apoyar en la construcción anterior.
Sin pérdida de generalidad situamos C en el origen de coordenadas y la recta BC ~~sea~~ en el eje OX





Por simetría, vemos que $\vec{GM}$ y $\vec{GN}$ tienen la misma coordenada y y la coordenada x cambiada de signo.
O sea si $\vec{GM}(v_1, v_2) \Rightarrow \vec{GN}(-v_1, v_2)$. Y lo mismo sucede con $\vec{G'S}$ y $\vec{G'P}$ (Notar que solo es válido con esa posición de los ejes).

Podemos hallar S de diferentes métodos:

① Hallamos N como la intersección de c_1 y r_{BC}. Luego hallamos S.

② Hallamos G' y le ~~sumamos~~ trasladamos el vector $\vec{G'S}$.

METODO 2: $\vec{G'P} = \vec{AG}$

$$G = \left(\frac{b+a_1}{3}, \frac{a_2}{3}\right)$$

$$M = \left(\frac{b}{2}, 0\right)$$

$$\vec{OG'} = \vec{OG} + \vec{AG} = \left(\frac{b+a_1}{3}, \frac{a_2}{3}\right) + \left(\frac{b+a_1}{3} - a_1, \frac{a_2}{3} - a_2\right) =$$

$$= \left(\frac{2b}{3} + \frac{2a_1}{3} - a_1, -\frac{a_2}{3}\right) = \left(\frac{2b}{3} - \frac{a_1}{3}, -\frac{a_2}{3}\right)$$

$$\vec{G'P} = \vec{AG} = \left(\frac{b}{3} - \frac{2}{3}a_1, -\frac{2a_2}{3}\right) \Rightarrow \vec{G'S} = \left(-\frac{b}{3} + \frac{2}{3}a_1, -\frac{2a_2}{3}\right)$$

Y obtenemos:

$$\vec{OS} = \vec{OG'} + \vec{G'S} = \left(\frac{2b}{3} - \frac{a_1}{3}, \frac{-a_2}{3}\right) + \left(\frac{-b}{3} + \frac{2}{3}a_1, \frac{-2a_2}{3}\right)$$

$$= \boxed{\left(\frac{1}{3}(b+a_1), -a_2\right) = S}$$

MÉTODO 2: $r^2 = |GM|^2 = \left(\frac{b}{2} - \frac{b+a_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{3}\right)^2$

Luego $C_1 \equiv \left(x - \frac{b+a_1}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{a_2}{3}\right)^2 = r^2$

Hallamos $N = C_1 \cap \underset{y=0}{CB} \Rightarrow \left(x - \frac{b+a_1}{3}\right)^2 + \cancel{\left(-\frac{a_2}{3}\right)^2} = \left(\frac{b}{2} + \frac{b+a_1}{3}\right)^2 + \cancel{\left(\frac{a_2}{3}\right)^2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - \frac{b+a_1}{3} = \frac{b}{2} - \frac{b_1+a_1}{3} \Rightarrow \text{Obtenemos } M \\ x - \frac{b+a_1}{3} = -\frac{b}{2} + \frac{b_1+a_1}{3} \Rightarrow x = -\frac{b}{2} + \frac{2}{3}(b+a_1) \end{cases}$$

Luego $N\left(-\frac{b}{2} + \frac{2}{3}(b+a_1), 0\right)$

Hallamos $\vec{AN}$ $\cancel{\left(\frac{1}{3}(b+a_1), -a_2\right)}$ $= \left(-\frac{b}{2} + \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}a_1, -a_2\right)$

$$\vec{OS} = \vec{ON} + \vec{AN} = \left(-b + \frac{4}{3}b + \frac{1}{3}a_1, -a_2\right) =$$

$$= \boxed{\left(\frac{1}{3}b + \frac{1}{3}a_1, -a_2\right) = S}$$