P a)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ Kxe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f es función de densidad de la v.a. X si se cumple:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} Kxe^{-x^2}dx = -\frac{K}{2}\int_{0}^{+\infty} -2x\,e^{-x^2}dx =$$

$$= -\frac{K}{2}\left[e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = -\frac{K}{2}\Big(\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-x^2}}_{0} - \underbrace{e^0}_{1}\Big) = -\frac{K}{2}(-1) = \frac{K}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{K=2}$$

b) La función de distribución viene dada por:

$$F(x) = P(X \le x)$$

Hallamos $P(X \le x) \underset{x>0}{=} \int_0^x 2x\,e^{-x^2}dx = \left[-e^{-x^2}\right]_0^x = 1 - e^{-x^2}$

Por lo tanto:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ 1 - e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$$

c) MODA = Valor máximo de f(x)

Obviamente sólo se alcanza en $x > 0$

$$f'(x) = 2e^{-x^2} + 2x(-2x)e^{-x^2} = 2e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0$$

$$\Rightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \cancel{\pm}\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\text{Moda} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Es fácil comprobar que es un máximo ya que $f'(0) > 0$ y $f'(1) = -1 < 0$.

MEDIANA $\equiv x_0$. Es el valor que ocupa la posición central.

Por lo tanto $\underset{\underset{F(x_0)}{\parallel}}{P(x \leq x_0)} = 0'5 \Rightarrow 1 - e^{-x_0^2} = 1/2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow e^{-x_0^2} = 1/2 \Rightarrow -x_0^2 = \ln(1/2) = -\ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2 = \ln 2 \Rightarrow \boxed{x_0 = \cancel{\pm}\sqrt{\ln 2}}$$

d) MEDIA $\equiv \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \overset{2x \cdot x}{2x^2} e^{-x^2} dx =$

$$= \int_0^{+\infty} t^{1/2} e^{-t} dt = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

$z-1 \to z = 3/2$

$t = x^2$
$x = \sqrt{t}$
$dt = 2x\,dx$
$x = 0 \to t = 0$
$x = +\infty \to t = +\infty$

VARIANZA $= \sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \left(x - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^2 2x e^{-x^2} dx =$

$$= \int_0^{+\infty} \left(x^2 - \sqrt{\pi}\,x + \frac{\pi}{4}\right) 2x e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} 2x \cdot x^2 \cdot e^{-x^2} dx -$$

$$- \sqrt{\pi} \underbrace{\int_0^{+\infty} 2x^2 e^{-x^2} dx}_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} + \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{4} 2x e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} 2x \cdot x^2 e^{-x^2} dx$$

$$- \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\left[-e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} = \int_0^{+\infty} t e^{-t} dt - \frac{\pi}{4} =$$

$x^2 = t$
$2x\,dx = dt$

$$= \overset{=0}{\left[-t e^{-t}\right]_0^{+\infty}} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt - \frac{\pi}{4} = 0 + \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \frac{\pi}{4} =$$

$$\left[\begin{array}{l} u = t \to du = dt \\ dv = e^{-t}dt \to v = -e^{-t} \end{array}\right]$$

$$= \boxed{1 - \frac{\pi}{4}}$$