4º Sean $p_1(x)=ax^2+bx+c$ y $p_2(x)=a'x^2+b'x+c'$

Consideramos la base B en el siguiente orden $B=\{x^2,x,1\}$

Por lo que $p_1(x)=(a,b,c)$ y $p_2(x)=(a',b',c')$

Hallamos $f(p_1,p_2)=\int_0^1 p_1(x)\cdot p_2(x)\,dx=\int_0^1 [aa'x^4+(ab'+a'b)x^3+$

$+(ac'+a'c+bb')x^2+(bc'+b'c)x+cc']\,dx=$

$=\frac{1}{5}aa'+\frac{1}{4}(ab'+a'b)+\frac{1}{3}(ac'+a'c+bb')+\frac{1}{2}(bc'+b'c)+cc'$

a) La matriz G buscada es una matriz 3x3 que verifica:

$$f(p_1,p_2)=(a,b,c)\cdot G\cdot\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$$

Como $(a,b,c)\cdot\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}aa' & ab' & ac'\\ ba' & bb' & bc'\\ ca' & cb' & cc'\end{pmatrix}$ tenemos que

los elementos de G coinciden con los coeficientes del resultado de $f(p_1,p_2)$, luego:

$$G=\begin{pmatrix}1/5 & 1/4 & 1/3\\ 1/4 & 1/3 & 1/2\\ 1/3 & & 1\end{pmatrix}$$

· f es definida positiva si $\forall p\in\mathbb{R}_2[x]$ se cumple que $f(p,p)\geq 0$

$$f(p,p)=\int_0^1 p(x)\cdot p(x)\,dx=\int_0^1 p(x)^2\,dx$$

La integral es el área entre $[0,1]$ de una función positiva

luego $f(p,p)\geq 0$.

Otro método para calcular G es hallar los valores de f para los elementos de la base:

$$G = \begin{pmatrix} f(x^2,x^2) & f(x^2,x) & f(x^2,1) \\ f(x,x^2) & f(x,x) & f(x,1) \\ f(1,x^2) & f(1,x) & f(1,1) \end{pmatrix}$$ y hallar dichos

coeficientes teniendo en cuenta que se cumple la conmutatividad: $f(x,x^2)=f(x^2,x)$

$f(1,x)=f(x,1)$

$f(1,x^2)=f(x^2,1)$

b/ $p(x)=3x^2+1=(3,0,1)$ $\quad q(x)=2x+1=(0,2,1)$

$$\int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx = f(p,q) = (3,0,1)\begin{pmatrix} 1/5 & 1/4 & 1/3 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{14}{15}, \frac{5}{4}, 2\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{5}{2} + 2 = \boxed{\frac{9}{2}}$$ #